

**LIBRIS**

We know  
books

**MIHAIL BĂLUNĂ**

**Iurie Boreico • Andrei Ciupan  
Andrei Frimu • Cosmin Pohoată**

**OLIMPIADELE  
DE  
MATEMATICĂ**

**2007  
CLASELE IX-X**

**EDITURA GIL**

# Cuprins

<b>1</b>	<b>Clasa a IX-a - Enunțuri</b>	<b>13</b>
1.1	Etapa locală . . . . .	13
1.1.1	Alba . . . . .	13
1.1.2	Bihor . . . . .	14
1.1.3	Botoșani . . . . .	14
1.1.4	Brașov . . . . .	15
1.1.5	Brăila . . . . .	16
1.1.6	București . . . . .	16
1.1.7	Buzău . . . . .	17
1.1.8	Cluj . . . . .	18
1.1.9	Constanța . . . . .	19
1.1.10	Dâmbovița . . . . .	19
1.1.11	Dolj . . . . .	20
1.1.12	Galați . . . . .	20
1.1.13	Giurgiu . . . . .	21
1.1.14	Harghita . . . . .	22
1.1.15	Iași . . . . .	23
1.1.16	Maramureș . . . . .	23
1.1.17	Mehedinți . . . . .	24
1.1.18	Neamț . . . . .	24
1.1.19	Olt . . . . .	25
1.1.20	Prahova . . . . .	26
1.1.21	Satu Mare . . . . .	27
1.1.22	Sălaj . . . . .	27
1.1.23	Sibiu . . . . .	28
1.1.24	Suceava . . . . .	29
1.1.25	Teleorman . . . . .	29
1.1.26	Vaslui . . . . .	30
1.1.27	Vrancea . . . . .	30
1.2	Etapa județeană și a municipiului București . . . . .	30

1.3	Etapa națională	31
1.4	Concursuri interjudețene	32
1.4.1	<i>Cristian Calude</i> , Galați, 4 noiembrie 2006	32
1.4.2	<i>Acad. Radu Miron</i> , Vaslui, 10-12 noiembrie 2006	33
1.4.3	<i>Matematica, de drag</i> , Bistrița-Năsăud, 24 noiembrie 2006	33
1.4.4	<i>Nicolae Coculescu</i> , Slatina, 1 decembrie 2006	34
1.4.5	<i>Petru Moroșan-Trident</i> , Brăila, 8-10 decembrie 2006	35
1.4.6	<i>Cezar Ivănescu</i> , Târgoviște, 27 ianuarie 2007	35
1.4.7	<i>Unirea</i> , Focșani, 27 ianuarie 2007	36
1.4.8	<i>Grigore Moisil</i> , Urziceni, 2-4 februarie 2007	36
1.4.9	Concursul de Matematică al Revistei RMCS, Caraș-Severin, 4 februarie 2007	37
1.4.10	<i>Mathematica - Modus Vivendi</i> , 25 februarie 2007	38
1.4.11	Concursul Național „Adolf Haimovici” de matematică aplicată, etapa județeană, 3 martie 2007	38
1.4.12	Concursul național de matematică <i>Arhimede</i> , 17 martie 2007	39
1.4.13	<i>Traian Lalescu</i> , Caransebeș, 23-25 martie 2007	40
1.4.14	<i>Gheorghe Lazăr</i> , Sibiu, 24-25 martie 2007	41
1.4.15	Concursul centrelor de excelență din Moldova, Suceava, 2 iunie 2007	41
1.4.16	<i>Victor Vălcovici</i>	42
1.4.17	Concursul Gazetei Matematice <i>Nicolae Teodorescu</i> , Pitești, 14 august 2007	42
1.5	Olimpiada națională din Republica Moldova	43
1.5.1	Ziua 1	43
1.5.2	Ziua 2	44
<b>2</b>	<b>Clasa a X-a - Enunțuri</b>	<b>45</b>
2.1	Etapa locală	45
2.1.1	Alba	45
2.1.2	Bihor	45
2.1.3	Botoșani	46
2.1.4	Brașov	47
2.1.5	Brăila	48
2.1.6	București	48
2.1.7	Buzău	49
2.1.8	Cluj	49
2.1.9	Constanța	50
2.1.10	Dâmbovița	51
2.1.11	Dolj	51
2.1.12	Galați	52
2.1.13	Giurgiu	53

2.1.14	Iași . . . . .	53
2.1.15	Harghita . . . . .	54
2.1.16	Maramureș . . . . .	55
2.1.17	Neamț . . . . .	55
2.1.18	Olt . . . . .	56
2.1.19	Prahova . . . . .	56
2.1.20	Satu Mare . . . . .	57
2.1.21	Sălaj . . . . .	58
2.1.22	Sibiu . . . . .	58
2.1.23	Suceava . . . . .	59
2.1.24	Teleorman . . . . .	60
2.1.25	Vaslui . . . . .	60
2.1.26	Vrancea . . . . .	60
2.2	Etapa județeană și a municipiului București . . . . .	61
2.3	Etapa națională . . . . .	61
2.4	Concursuri interjudețene . . . . .	62
2.4.1	<i>Cristian Calude</i> , Galați, 4 noiembrie 2006 . . . . .	62
2.4.2	<i>Acad. Radu Miron</i> , Vaslui, 10-12 noiembrie 2006 . . . . .	63
2.4.3	<i>Matematica, de drag</i> , Bistrița-Năsăud, 24 noiembrie 2006 . . . . .	63
2.4.4	<i>Nicolae Coculescu</i> , Slatina, 1 decembrie 2006 . . . . .	64
2.4.5	<i>Petru Moroșan-Trident</i> , Brăila, 8-10 decembrie 2006 . . . . .	64
2.4.6	<i>Cezar Ivănescu</i> , Târgoviște, 27 ianuarie 2007 . . . . .	65
2.4.7	<i>Unirea</i> , Focșani, 27 ianuarie 2007 . . . . .	65
2.4.8	<i>Grigore Moșil</i> , Urziceni, 2-4 februarie 2007 . . . . .	66
2.4.9	Concursul de Matematică al Revistei RMCS, Caraș-Severin, 4 februarie 2007 . . . . .	67
2.4.10	<i>Mathematica - Modus Vivendi</i> , 25 februarie 2007 . . . . .	67
2.4.11	Concursul de matematică aplicată <i>Adolf Haimovici</i> , Etapa județeană, 3 martie 2007 . . . . .	68
2.4.12	Concursul național de matematică <i>Arhimede</i> , 17 martie 2007 . . . . .	68
2.4.13	<i>Traian Lalescu</i> , Caransebeș, 23-25 martie 2007 . . . . .	69
2.4.14	<i>Gheorghe Lazăr</i> , Sibiu, 24-25 martie 2007 . . . . .	70
2.4.15	Concursul centrelor de excelență din Moldova, Suceava, 2 iunie 2007 . . . . .	71
2.4.16	<i>Victor Vâlcovici</i> . . . . .	71
2.4.17	Concursul național <i>La Școala cu Ceas</i> , Barajele de seniori, Râmnicu Vâlcea, 19-20 ianuarie 2007 . . . . .	72
2.4.18	<i>Alexandru Myller</i> , Iași, 24 martie 2007, Test pentru seniori . . . . .	73
2.4.19	Concursul Gazetei Matematice <i>Nicolae Teodorescu</i> , Pitești, 14 august 2007 . . . . .	73

2.4.20	Concursul Gazetei Matematice <i>Nicolae Teodorescu</i> , Pitești, 15 august 2007, Clasele IX-X	74
2.5	Olimpiada națională din Republica Moldova	74
2.5.1	Ziua 1	74
2.5.2	Ziua 2	75
<b>3</b>	<b>Clasa a IX-a - Soluții</b>	<b>77</b>
3.1	Etapa locală	77
3.1.1	Alba	77
3.1.2	Bihor	79
3.1.3	Botoșani	80
3.1.4	Brașov	81
3.1.5	Brăila	82
3.1.6	București	83
3.1.7	Buzău	87
3.1.8	Cluj	88
3.1.9	Constanța	89
3.1.10	Dâmbovița	90
3.1.11	Dolj	91
3.1.12	Galați	92
3.1.13	Giurgiu	93
3.1.14	Harghita	94
3.1.15	Iași	95
3.1.16	Maramureș	96
3.1.17	Mehedinți	97
3.1.18	Neamț	98
3.1.19	Olt	99
3.1.20	Prahova	100
3.1.21	Satu Mare	102
3.1.22	Sălaj	102
3.1.23	Sibiu	103
3.1.24	Suceava	104
3.1.25	Teleorman	105
3.1.26	Vaslui	106
3.1.27	Vrancea	106
3.2	Etapa județeană și a municipiului București	106
3.3	Etapa națională	108
3.4	Concursuri interjudețene	109
3.4.1	<i>Cristian Calude</i> , Galați, 4 noiembrie 2006	109
3.4.2	<i>Acad. Radu Miron</i> , Vaslui, 10-12 noiembrie 2006	111
3.4.3	<i>Matematica, de drag</i> , Bistrița-Năsăud, 24 noiembrie 2006	112

3.4.4	<i>Nicolae Coculescu</i> , Slatina, 1 decembrie 2006	113
3.4.5	<i>Petru Moroșan-Trident</i> , Brăila, 8-10 decembrie 2006	115
3.4.6	<i>Cezar Ivănescu</i> , Târgoviște, 27 ianuarie 2007	116
3.4.7	<i>Unirea</i> , Focșani, 27 ianuarie 2007	117
3.4.8	<i>Grigore Moisil</i> , Urziceni, 2-4 februarie 2007	118
3.4.9	Concursul de Matematică al Revistei RMCS, Caraș-Severin, 4 februarie 2007	119
3.4.10	<i>Mathematica - Modus Vivendi</i> , 25 februarie 2007	121
3.4.11	Concursul Național „Adolf Haimovici” de matematică aplicată, etapa județeană, 3 martie 2007	122
3.4.12	Concursul național de matematică <i>Arhimede</i> , 17 martie 2007	123
3.4.13	<i>Traian Lalescu</i> , Caransebeș, 23-25 martie 2007	124
3.4.14	<i>Gheorghe Lazăr</i> , Sibiu, 24-25 martie 2007	125
3.4.15	Concursul centrelor de excelență din Moldova, Suceava, 2 iunie 2007	127
3.4.16	<i>Victor Vâlcovici</i>	129
3.4.17	Concursul Gazetei Matematice <i>Nicolae Teodorescu</i> , Pitești, 14 august 2007	129
3.5	Olimpiada națională din Republica Moldova	131
3.5.1	Ziua 1	131
3.5.2	Ziua 2	133
<b>4</b>	<b>Clasa a X-a - Soluții</b>	<b>135</b>
4.1	Etapa locală	135
4.1.1	Alba	135
4.1.2	Bihor	136
4.1.3	Botoșani	137
4.1.4	Brașov	138
4.1.5	Brăila	139
4.1.6	București	140
4.1.7	Buzău	142
4.1.8	Cluj	143
4.1.9	Constanța	144
4.1.10	Dâmbovița	145
4.1.11	Dolj	146
4.1.12	Galați	147
4.1.13	Giurgiu	148
4.1.14	Iași	149
4.1.15	Harghita	151
4.1.16	Maramureș	152
4.1.17	Neamț	152
4.1.18	Olt	153

4.1.19	Prahova	154
4.1.20	Satu Mare	155
4.1.21	Sălaj	156
4.1.22	Sibiu	157
4.1.23	Suceava	158
4.1.24	Teleorman	159
4.1.25	Vaslui	160
4.1.26	Vrancea	161
4.2	Etapa județeană și a municipiului București	162
4.3	Etapa națională	163
4.4	Concursuri interjudețene	164
4.4.1	<i>Cristian Calude</i> , Galați, 4 noiembrie 2006	164
4.4.2	<i>Acad. Radu Miron</i> , Vaslui, 10-12 noiembrie 2006	166
4.4.3	<i>Matematica, de drag</i> , Bistrița-Năsăud, 24 noiembrie 2006	167
4.4.4	<i>Nicolae Coculescu</i> , Slatina, 1 decembrie 2006	167
4.4.5	<i>Petru Moroșan-Trident</i> , Brăila, 8-10 decembrie 2006	170
4.4.6	<i>Cezar Ivănescu</i> , Târgoviște, 27 ianuarie 2007	170
4.4.7	<i>Unirea</i> , Focșani, 27 ianuarie 2007	171
4.4.8	<i>Grigore Moisil</i> , Urziceni, 2-4 februarie 2007	173
4.4.9	Concursul de Matematică al Revistei RMCS, Caraș-Severin, 4 februarie 2007	173
4.4.10	<i>Mathematica - Modus Vivendi</i> , 25 februarie 2007	174
4.4.11	Concursul de matematică aplicată <i>Adolf Haimovici</i> , Etapa județeană, 3 martie 2007	175
4.4.12	Concursul național de matematică <i>Arhimede</i> , 17 martie 2007	176
4.4.13	<i>Traian Lalescu</i> , Caransebeș, 23-25 martie 2007	177
4.4.14	<i>Gheorghe Lazăr</i> , Sibiu, 24-25 martie 2007	178
4.4.15	Concursul centrelor de excelență din Moldova, Suceava, 2 iunie 2007	179
4.4.16	<i>Victor Vâlcovici</i>	181
4.4.17	<i>La Școala cu Ceas</i> , Barajele de seniori, Râmnicu Vâlcea, 19-20 ianuarie 2007	182
4.4.18	<i>Alexandru Myller</i> , Iași, 24 martie 2007, Test pentru seniori	184
4.4.19	Concursul Gazetei Matematice <i>Nicolae Teodorescu</i> , Pitești, 14 august 2007	185
4.4.20	Concursul Gazetei Matematice „Nicolae Teodorescu”, Pitești, 15 august 2007, Clasele IX-X	187
4.5	Olimpiada națională din Republica Moldova	189
4.5.1	Ziua 1	189
4.5.2	Ziua 2	191

## Capitolul 1

# Clasa a IX-a - Enunțuri

### 1.1 Etapa locală

#### 1.1.1 Alba

1. Se consideră ecuația

$$\left[ \frac{x+a}{2} \right] = \frac{x+1}{3}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

a) Rezolvați ecuația pentru  $a = 1$ .

b) Determinați  $a \in \mathbb{R}$  știind că mulțimea soluțiilor ecuației este  $S = \{-1, 2\}$ .

2. a) Demonstrați că șirul  $(a_n)_{n \geq 1} \subset (0, \infty)$  este progresie aritmetică dacă și numai dacă

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}, \quad \text{oricare ar fi } n \geq 2.$$

b) Se dau numerele reale  $a$  și  $b$ . Determinați  $x, y, z$  astfel încât  $z, y, x$  sunt în progresie geometrică;  $x, y+a, z$  sunt în progresie aritmetică și  $x, y+a, z+b$  sunt în progresie geometrică.

3. Să se determine funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât

$$2f(x) + 3f(1-x) = 4x - 1,$$

oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ .

4. Pe laturile  $(AB)$  și  $(AC)$  ale triunghiurilor  $ABC$  se consideră punctele  $D$ , respectiv  $E$ , astfel încât

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{3}{4}.$$

Pe semidreptele  $(BE)$  și  $(CD)$  se consideră punctele  $E_1$  și  $D_1$  astfel încât  $EE_1 = 3BE$  și  $DD_1 = 3CD$ . Să se demonstreze că punctele  $A, E_1, D_1$  sunt coliniare.

## 1.1.2 Bihor

1. a) Dacă  $(b_n)$  progresie geometrică cu rația  $q$  astfel încât  $b_5 - b_1 = 80$ ;  $b_4 - b_2 = 24$ , determinați  $b_1$  și  $q$ .

b) Dacă  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sunt în progresie aritmetică cu rația  $r$ , determinați

$$S_n = \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n}$$

în funcție de  $a_1$  și  $r$ .

\*\*\*

2. Fie  $A \neq B$  două puncte din plan și  $M \in [AB]$  astfel încât  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MB}$ , iar  $O$  un punct arbitrar din plan. Să se arate că:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{OB}.$$

b) Dacă  $A(2, 1), B(6, 3)$  determinați:

(i) coordonatele punctului  $M$  pentru care  $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$

(ii) coordonatele mijlocului segmentului  $[AB]$ .

\*\*\*

3. Să se determine funcția  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  cu proprietățile:

a)  $f(m+n) = f(m) + f(n) + 2 \cdot m \cdot n - 1$ ;

b)  $f(n) \cdot f(n+1) = f[(n+1)^2]$ .

Ioan Cuc

4. Arătați că:

$$\sqrt{m} + \sqrt{m+1} + \sqrt{m+2} + \dots + \sqrt{m+2006} \leq 2007 \cdot \sqrt{m+1003},$$

oricare ar fi  $m \in \mathbb{N}$ .

Mihai Gabor

## 1.1.3 Botoșani

1. a) Să se arate că

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

oricare ar fi  $n \geq 1$ .

b) Să se găsească cel mai mare  $k$  natural astfel ca:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{kn+1}},$$

oricare ar fi  $n \geq 1$ .

2. Fie numărul  $a = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k(k+1)} \cdot (\sqrt{k} + \sqrt{k+1})}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

a) Să se scrie  $a$  sub formă restrânsă și să se calculeze partea întreagă și partea sa fracționară.

b) Să se determine  $n \in \mathbb{N}^*$  pentru care  $\{a\} = \frac{4}{5}$ .

c) Să se indice un număr rațional  $q$  astfel încât ca  $a < q < 1$ , oricare ar fi  $n \geq 1$ .

3. Fie  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$ , numere naturale distincte care au ca divizori primi doar numerele 2 și 3.

a) Să se indice 100 astfel de numere.

b) Să se arate că

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 3.$$

4. Fie  $ABCD$  un patrulater în care  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$ . Dacă  $E \in (AB)$ ,  $F \in (DC)$  și

$$\frac{AE}{EB} = p, \quad \frac{DF}{FC} = q,$$

• determinați relația dintre  $p$  și  $q$  astfel ca:

a)  $DE$  să fie paralel cu  $BF$ .

b)  $E$  și  $F$  să fie coliniare cu mijlocul diagonalei  $(AC)$ .

c) Pot avea loc simultan relațiile de la punctele a) și b)?

### 1.1.4 Brașov

1. a) Fie  $O$  un punct din planul triunghiului  $ABC$ . Arătați că  $G$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABC$  dacă și numai dacă  $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ .

b) Notăm cu  $G_A, G_B$ , respectiv  $G_C$  centrele de greutate ale triunghiurilor  $MBC, MAC$  și respectiv  $MAB$ . Să se arate că  $\overrightarrow{AG_A} + \overrightarrow{BG_B} + \overrightarrow{CG_C} = \vec{0}$  dacă și numai dacă  $O = G$ .

\*\*\*

2. Fie  $ABCD$  un patrulater convex și punctele  $\{O\} = AC \cap BD$ ,  $\{M\} = AD \cap BC$ ,  $P \in (DC)$ ,  $Q \in (AB)$  astfel încât

$$\frac{PD}{PC} = \frac{QB}{QA} = r.$$

a) Să se arate că vectorii  $\overrightarrow{AB}$  și  $\overrightarrow{CD}$  sunt coliniari dacă și numai dacă  $\overrightarrow{OP}$  și  $\overrightarrow{OQ}$  sunt coliniari.

b) Dacă  $r = 1$ , atunci  $\overrightarrow{AB}$  și  $\overrightarrow{CD}$  sunt coliniari dacă și numai dacă  $\overrightarrow{OM}$  și  $\overrightarrow{OQ}$  sunt coliniari.

c) Arătați că  $AB \parallel CD$  dacă și numai dacă punctele  $M$ , mijlocul segmentului  $[DC]$ ,  $O$  și mijlocul segmentului  $[AB]$  sunt coliniare.

3. a) Arătați că  $\underbrace{(6 \dots 6)}_n^2 + \underbrace{88 \dots 8}_n = \underbrace{44 \dots 4}_{2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

b) Calculați suma  $S_x = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}$ ,  $x \neq 1$ .

c) Calculați suma  $S = 1 + 2 \cdot 9 + 33 \cdot 99 + \dots + n \cdot \underbrace{9 \dots 9}_n$ .

\*\*\*

4. Să se arate că  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{29}} > 8,95$ .

Viorel Drăghici

### 1.1.5 Brăila

1. Să se calculeze suma:

$$S_n = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4} + \dots + \frac{n}{x^{n+1}}, \quad x \in \mathbb{R}^*, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

\*\*\*

2. Să se demonstreze că, oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ , are loc identitatea:

$$\frac{1}{\sin 1 \sin 2} + \frac{1}{\sin 2 \sin 3} + \dots + \frac{1}{\sin n \sin(n+1)} = \frac{\sin n}{\sin^2 1 \sin(n+1)}.$$

Ion Dan

3. Determinați funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , cu proprietățile:

i)  $f(x+y) = f(x)f(a-y) + f(y)f(a-x)$ , oricare ar fi  $x, y, a \in \mathbb{R}$ .

ii)  $f(0) = \frac{1}{2}$ .

\*\*\*

4. Fie  $x, y, z$ , numere reale pozitive, astfel încât  $xyz = 1$ . Demonstrați inegalitatea:

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} + \frac{y+z}{y^2+z^2} + \frac{z+x}{z^2+x^2} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Marius Damian

### 1.1.6 București

1. Fie  $a, b, c$  numere raționale. Pentru fiecare  $n \in \mathbb{Z}$  se consideră ecuația

$$E_n: (a+n)x^2 - 2(b+n)x + c+n = 0.$$

a) Arătați că, dacă  $a, b, c$  sunt în progresie aritmetică, atunci ecuațiile  $E_n$  au o rădăcină comună.

b) Arătați că, dacă fiecare ecuație  $E_n$  are rădăcini reale, atunci  $a, b, c$  sunt în progresie aritmetică și fiecare ecuație are rădăcini raționale.

2. Fie  $M$  mijlocul laturii  $[BC]$  a triunghiului  $ABC$ . Paralela la  $BC$  dusă printr-un punct  $G$  al segmentului  $(AM)$  taie  $AB$  în  $X$  și  $AC$  în  $Y$ ;  $CX$  și  $GB$  se taie în  $Q$ , iar  $CG$  și  $BY$  se taie în  $P$ . Notăm  $k = \frac{AG}{AM}$ .

a) Arătați că

$$\frac{GP}{PC} = \frac{k}{2}$$

b) Exprimați vectorul  $\overrightarrow{CP}$  în funcție de vectorii  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  și scalarul  $k$ .

c) Demonstrați că, dacă  $G$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABC$ , atunci triunghiul  $MPQ$  este asemenea cu triunghiul  $ABC$ .

3. Împărțim un pătrat prin paralele la laturi în  $n^2$  pătrate congruente.

a) Demonstrați că numărul pătratelor de diferite dimensiuni care apar în figura obținută este

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

b) Dacă ducem diagonalele în fiecare pătrat mic, câte triunghiuri dreptunghice isoscele de diferite dimensiuni apar în figura formată?

4. a) Demonstrați că, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , prin împărțirea cu rest a numărului  $3^{2^n}$  la  $2^n$  se obține un cât par.

b) Demonstrați că șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  dat de

$$a_n = \left[ \frac{3^n}{n} \right],$$

oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$  are o infinitate de termeni pari, o infinitate de termeni divizibili cu 3 și o infinitate de termeni divizibili cu 5 (cu  $[x]$  s-a notat partea întreagă a numărului real  $x$ ).

Vasile Zidaru, *Gazeta Matematică*

### 1.1.7 Buzău

1. Fie  $a, b, c \in \mathbb{R}$  astfel încât  $a^{2006} + b^{2006} + c^{2006} = 2^{2006}$ . Să se arate că

$$a^{2007} + b^{2007} + c^{2007} \leq 2^{2007}.$$

Când avem egalitate?

2. Să se afle valorile lui  $x \in \mathbb{R}$  pentru care

$$|x - 1| + |x - 2007| \geq 2006.$$

3. Fie  $ABCD$  un patrulater convex și  $O$  intersecția diagonalelor. Să se arate că centrele de greutate ale triunghiurilor  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ ,  $DOA$  sunt vârfurile unui paralelogram.

## 1.1.8 Cluj

1. a) Într-o sală de cinema fotoliile sunt dispuse pe rânduri și pe fiecare rând, începând cu al doilea se află cu 2 locuri mai mult decât pe rândul precedent. Știind că pe primul rând sunt 30 de locuri și că numărul total de locuri este 1860 aflați pe câte rânduri sunt dispuse fotoliile și câte locuri sunt pe ultimul rând.

*V. Lupșor*

- b) Arătați că

$$|x| + |x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2n + 1| \geq n,$$

oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  și oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ . În ce caz avem egalitate?

*T. Livadar*

2. a) Studiați monotonia șirului:  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,

$$a_n = \frac{\sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n (k+1)^2 + \dots + \sum_{k=1}^n (k+n)^2}{(7n^2 + 7n + 1) \sum_{k=1}^n k}.$$

*T. Poenaru*

- b) Să se determine funcțiile  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , cu proprietatea

$$f(x) + f([x]) + f(\{x\}) = 2x$$

oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ , notațiile fiind cele uzuale.

*M. Pop*

3. a) Arătați că oricare ar fi numerele reale  $a, b, c, x, y, z$  este adevărată inegalitatea:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2.$$

În ce caz avem egalitate?

- b) Fie  $ABC$  un triunghi ascuțitunghic,  $M$  un punct în interiorul lui, iar  $P, Q$  și  $R$  proiecțiile lui  $M$  respectiv pe  $BC, AC$  și  $AB$ . Determinați poziția lui  $M$  pentru care suma  $BP^2 + CQ^2 + AR^2$  este minimă.

*A. Buju*

- c) Fie  $ABCD$  un trapez ( $AB \parallel CD$ ),  $M$  și  $N$  mijloacele bazelor ( $AB$ ) respectiv ( $CD$ ),  $P \in (CM)$ ,  $BP \cap AC = \{E\}$  și  $AN \cap DE = \{Q\}$ . Să se demonstreze că

$$\frac{AQ}{QN} \cdot \frac{CP}{PM} = 4.$$

*N. Alb*